数理解析研究所講究録
第 838 巻 1993 年 44-49

H-STURUCTURE AND HIGHER HOMOTOPY ASSOCIATIVITY OF $B_n(p)$

高知大学・理　逸見　豊　(Yutaka Hemmi)

1. INTRODUCTION

H 空間 X が有限個の奇数次元球面の積と p 同値（以下 p は素数）になるとき X は p-regular であるという．X が p-regular であれば明らかに

$$H^*(X;\mathbb{Z}/p)\cong\Lambda(x_1,\ldots,x_k),\quad \deg x_i=n_i:\mathrm{odd} \tag{$*$}$$

が成り立つ．上の条件 $(*)$ は H 空間においては一般的な条件である．実際 $(*)$ は X が mod p 有限で p-torsion free という条件と同値になる．よって特に X が有限複体の homotopy 型を持てば，ほとんど全ての p に対して $(*)$ が成り立つ．

さて逆に $(*)$ がみたされているとき，どの様な条件の下で X は p-regular になるであろうか．これに関しては次のことが知られている．以下 $(*)$ では $n_1\leq\cdots\leq n_k$ にとっておく．

定理 1.1 (Kumpel [6]). X を H 空間で $(*)$ をみたすものとする．いま $n_k-n_1<2(p-1)$ であれば X は p-regular になる．

さて $2(p-1)=\deg\mathcal{P}^1$ であるので，上の定理の仮定は $H^*(X;\mathbb{Z}/p)$ 上で Steenrod 作用素が自明になることを意味している．すなわち上の定理はある意味で best possible の結果をあたえている．

次に $n_k-n_1\geq 2(p-1)$ のときを考える．この場合は $H^*(X;\mathbb{Z}/p)$ 上の Steenrod 作用素が自明になるとは限らない．よって X の mod p 分解を考えるには球面以外の空間を考える必要がある．そのようなものの中で最も単純なものが $B_n(p)$ である

定義 1.2 (Mimura, Toda [9], Oka [10]). 空間 $Bn(p)$ $(n\geq 1)$ を次の pull back diagram によって定める．

$$\begin{tikzcd}
S^{2n+1} \arrow[r, equal] \arrow[d] & S^{2n+1}=O(2n+2)/O(2n+1) \arrow[d] \\
B_n(p) \arrow[r] \arrow[d] & O(2n+3)/O(2n+1) \arrow[d] \\
S^{2n+2p-1} \arrow[r, "f"'] & S^{2n+2}=O(2n+3)/O(2n+2)
\end{tikzcd}$$

ただし f は ${}^p\pi_{2n+2p-1}(S^{2n+2}) \cong \mathbb{Z}/p$ の生成元を代表する写像である.

定義より

$$H^*(B_n(p);\mathbb{Z}/p) \cong \Lambda(x_1, x_2),$$
$$\deg x_1 = 2n+1,\ \deg x_2 = 2n+2p-1,\ \mathcal{P}^1 x_1 = x_2.$$

H 空間 X が有限個の奇数次元球面および $B_n(p)$ の積と p 同値になるとき X は quasi p-regular であるという. 定理 1.1 の拡張として $n_k - n_1 < 4(p-1) = \deg \mathcal{P}^2$ の仮定のもとで X が quasi p-regular になることが予想される. 実際にはさらにいくらかの条件を仮定した形での結果が知られている. 例えば次が成り立つ.

定理 1.3 (Wilkerson [12]). X を H 空間で $(*)$ をみたし, $n_k - n_1 < 4(p-1)$ で, さらに任意の i に対し $\mathcal{P}^1 x_i = 0$ または $\mathcal{P}^1 x_i = x_j$ (for some j) が成り立つとする. このとき X は quasi p-regular になる.

上の定理以外に Harper [4], McCleary [7] の結果などが知られている.

さて一般に $Y \times Z$ が H 空間になることと, Y, Z が共に H 空間になることは同値である. したがって $(*)$ をみたす p-regular H 空間が存在することと, S^{n_i} がすべて mod p H 空間 (p 局所化が H 空間) になることは同値になる. また quasi p-regular に関しては, 対応する S^{n_i} および $B_n(p)$ が mod p H 空間になることが同値になる. 奇数次元球面の H 空間構造に関しては次のことが知られている.

定理 1.4 (Adams [1], [2]). mod 2 H 空間になる球面は S^1, S^3, S^7 のみである. 一方奇数次元球面は任意の奇素数 p に対して mod p H 空間となる.

上の定理より p が奇素数であれば任意の奇数列 $(n_1, \ldots, n_k)$ に対して $(*)$ をみたす p-regular H 空間が存在する. 一方 $B_n(p)$ については次が知られている.

定理 1.5 (Harper, Zabrodsky [5]). $p \geq 5$ であれば $B_n(p)$ はすべて mod p H 空間になる. また $B_n(3)$ が mod 3 H 空間になる必要十分条件は $n = 1$ または $n \equiv -1 \bmod 3$ をみたすことである.

奇数次元球面の高位 homotopy 結合性に関しては次が知られている.

定理 1.6 (Stasheff [11]). 奇数次元球面はすべて mod p A_{p-1} 空間になる. さらに S^{2n-1} に対して, mod p A_p 空間 $\iff$ mod p loop 空間 $\iff$ $n | p-1$.

注意. Y, Z が共に A_m 空間であれば, $Y \times Z$ は A_m 空間になるが, $m \geq 3$ のときはこの逆は成立しない. $(SO(8) = SO(7) \times S^7)$

さてここでは次のことについて考える.

(1) $B_n(p)$ を一般化した空間は存在するか. すなわち

$$H^*(B_{n,k}(p);\mathbb{Z}/p) \cong \Lambda(x_1, \ldots, x_k),$$
$$\deg x_i = 2n + 2(i-1)(p-1) + 1,\ \mathcal{P}^{i-1} x_1 = x_i \tag{$**$}$$

となる空間 $B_{n,k}(p)$ は存在するか. またそれはいつ mod p H 空間になるか.

(2) $B_n(p)$ はどのような m に対して mod p A_m 空間になるか.

2. $B_{n,k}(p)$

$B_{n,k}(p)$ は存在するとしても一意かどうかは分からない. よってここでは $B_{n,k}(p)$ とは (∗∗) をみたす空間または H 空間一般をさすことにする.

さて $B_{n,1}(p) = S^{2n+1}$, $B_{n,2}(p) = B_n(p)$ と考えることが出来る. よって次のことが分かる.

- $B_{n,1}(p)$ はすべての p に対して存在する. また $p \geq 3$ ならば mod p H 空間になり, $p = 2$ のときは mod 2 H 空間になるときとならないときがある.
- $B_{n,2}(p)$ は $p \geq 3$ に対して存在する. また $p \geq 5$ ならば mod p H 空間になり, $p = 3$ のときは mod 3 H 空間になるときとならないときがある.

上の事実より次の予想が考えられる.

予想 2.1. $B_{n,k}(p)$ は

(1) $k \leq p-1$ ならば存在する.
(2) $k = p$ ならば存在するとは限らない.
(3) $k \leq p-2$ ならば H 空間になる.
(4) $k = p-1$ ならば H 空間になるとは限らない.

ここでは次を示す.

定理 2.2. (1) $k \leq p-1$ ならば $B_{n,k}(p)$ は存在する.
(2) $k \leq p-2$ ならば H 空間 $B_{n,k}(p)$ は存在する.

注意. Harper, Zabrodsky [5] によると $B_{n,p}(p)$ は必ずしも存在するとは限らないし, また存在しても mod p H 空間になるとは限らない.

$B_{n,k}(p)$ は k に関する induction で fibration

$$B_{n,k-1}(p) \longrightarrow B_{n,k}(p) \xrightarrow{\rho_k} S^{2n+2(k-1)(p-1)+1} \qquad (k \leq p-1)$$

の形で構成する. 構成法より

$$\rho_{k*}\colon {}^p\pi_{2n+2k(p-1)}(B_{n,k}(p)) \to {}^p\pi_{2n+2k(p-1)}(S^{2n+2(k-1)(p-1)+1}) \cong \mathbb{Z}/p$$

が全射になることが分かる. さらに Cooke, Harper, Zabrodsky [3] の判定法を用いて $k \leq p-2$ ならば $B_{n,k}(p)$ が mod p H 空間になることが分かる.

注意. Mimura, Nishida, Toda [8] は Stiefel complex という空間 $B_n^k(p)$ を次の条件をみたす空間として定義した.

(1) $H^*(B_n^k(p); \mathbb{Z}/p) \cong \Lambda(x_1, \ldots, x_k)$, $\deg x_i = 2n + 2(i-1)(p-1) + 1$.
(2) 写像 $f\colon B_n^k(p) \to W$ で $f^*\colon H^*(W; \mathbb{Z}/p) \to H^*(B_n^k(p); \mathbb{Z}/p)$ が全射になるものが存在する. ただし $W = W_{n+(k-1)(p-1)+1,(k-1)(p-1)+1}$.

Stiefel complex $B_n^k(p)$ が常に存在するかどうかは分からない．またここで考えている $B_{n,k}(p)$ と必ずしも一致しない．実際 Stiefel complex では Steenrod 作用素は $\mathcal{P}^i x_1 = \binom{n}{i} x_{i+1}$ となっている．

3. Non existence of mod p A_{p-1} structucture of $B_n(p)$

次に $B_n(p)$ が必ずしも mod p A_{p-1} 空間にならないことを示す．用いる手段は非安定 2 位 cohomology 作用素である．

空間 E_n を次の homotopy fibration で定める．

$$E_n \xrightarrow{r_n} K(\mathbb{Z}/p, 2n+1) \xrightarrow{h_n} K(\mathbb{Z}/p, 2np+1)$$

ただし h_n は $\mathcal{P}^n$ を represent する写像である．$f_0\colon B_n(p) \to K(\mathbb{Z}/p, 2n+1)$ を x_1 を represent する写像とする．いま $n \geq 2$ とすると $\mathcal{P}^n x_1 = 0$ だから f_0 の lift

$$f\colon B_n(p) \longrightarrow E_n$$

が存在する．

定理 3.1. $n \geq 2$, $n \not\equiv -1 \bmod p$ で $B_n(p)$ が A_{p-1} 空間とすると f は A_{p-2}写像にならない．

$B_n(p)$ が A_{p-1} 空間なら $H^*(P_{p-2}(E_n); \mathbb{Z}/p)$ の Steenrod algebra 上の subalgebra A で

$$A = \mathbb{Z}/p[y_1, y_2]/(p-1 \text{ fold decomposables})$$
$$\deg y_1 = 2(n+1),\ \mathcal{P}^1 y_1 = y_2$$

となるものが存在する．ただし $P_{p-2}(E_n)$ は E_n の $p-2$ 次射影空間である．このとき上の f が A_{p-2}写像にとれることと，A 上で $\mathcal{P}^n y_1 = 0$ となることは同値になる．また簡単な計算から $\mathcal{P}^n y_1$ の non-zero な最小次数の項は y_2^s の形であることが分かるので，たとえば次のようなことが示せる．

系 3.2. $n \not\equiv -1 \bmod p$, $n \geq (p-1)^2/2$ なら $B_n(p)$ は A_{p-1} 空間にならない．

さて上の 2 位 cohomology 作用素を，より一般的な空間に適応することにより次の定理を得る．

定理 3.3. X を単連結 A_{p-1} 空間で $(*)$ をみたすものとし，さらに $H^*(X; \mathbb{Z}/p)$ の primitive 類はすべて包含写像 $\varepsilon\colon \Sigma X \to P_{p-1}(X)$ から誘導される準同型 $\varepsilon^*\colon \widetilde{H}^*(P_{p-1}(X); \mathbb{Z}/p) \to \widetilde{H}^*(X; \mathbb{Z}/p)$ の像になっているとする．(この性質は A_{p-1}-primitive とよばれることがある．) いま $n \geq 2$, $\not\equiv -1 \bmod p$ であれば，任意の A_{p-1}写像 $f\colon X \to E_n$ に対し

$$\mathcal{P}^1(f^* r_n^*(\iota_n)) \in \operatorname{Im} \mathcal{P}^2$$

となっている．ただし $\iota_n \in H^{2n+1}(K(\mathbb{Z}/p, 2n+1); \mathbb{Z}/p)$ は基本 cohomology 類とする．

注意. 定理 3.1 では f が A_{p-2}写像にならないことが結論となっている．これは上の定理と比べると強い結果になっているが，これは $B_n(p)$ の特殊性を使っている．

さて上の定理の証明には次のようなアイデアが用いられている．いま簡単のため各生成元 x_i は A_{p-1}-primitive とする．このとき $H^*(P_{p-1}(X);\mathbb{Z}/p)$ の ideal M で Steenrod 作用素で閉じており，さらに

$$H^*(P_{p-1}(X);\mathbb{Z}/p)/M \cong \mathbb{Z}/p[y_1,\dots,y_k]/(p \text{ fold decomposables})$$
$$\varepsilon^*(y_i) = x_i$$

となるものが存在する．これまでは上の $H^*(P_{p-1}(X);\mathbb{Z}/p)/M$ 上の cohomology 作用素を調べることにより様々な結果が得られた．しかしここでは M の元をあたえる 2 位作用素を考えることにより定理を証明している．まず射影 $P_k(E_n) \to P_k(E_n)/P_{k-1}(E_n)$ から誘導される cohomology の準同型写像を考える．この時 $P_k(E_n)/P_{k-1}(E_n) \simeq \Sigma^k E_n^{\wedge k}$ ($E_n^{\wedge k} = E_n \wedge \cdots \wedge E_n$ k-fold) であるから，次の次数 k の準同型写像と考えることが出来る．

$$\beta_k^*\colon \widetilde{H}^*(E_n;\mathbb{Z}/p)^{\otimes k} \longrightarrow \widetilde{H}^*(P_k(E_n);\mathbb{Z}/p)$$

ただし $H^*(E_n;\mathbb{Z}/p)^{\otimes k} = \widetilde{H}^*(E_n;\mathbb{Z}/p) \otimes \cdots \otimes \widetilde{H}^*(E_n;\mathbb{Z}/p)$ (k-fold)．このとき次が成り立つ．

定理 3.4. $n \not\equiv -1 \bmod p$ なら $v \in H^{(2n+1)p-1}(P_{p-1}(E_n);\mathbb{Z}/p)$ で

$$\mathcal{P}^1 v = \beta_{p-1}^*(w)$$

をみたすものが存在する．ただし

$$w = \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^i i u^{\otimes i-1} \otimes (\mathcal{P}^1 u)u \otimes u^{\otimes p-i-1}$$
$$u = f^* r_n^*(\iota_n)$$

そこで f から誘導される写像 $P_{p-1}(f)\colon P_{p-1}(X) \to P_{p-1}(E_n)$ により $P_{p-1}(f)^*(v)$ を考えると，これは奇数次元の元だから M の元をあたえている．よって $H^*(P_{p-1}(X);\mathbb{Z}/p)$ の構成法より $\mathcal{P}^1(f^* r_n^*(\iota_n)) \in \operatorname{Im}\mathcal{P}^2$ が分かる．

References

1. J. F. Adams, *On the non-existence of elements of Hopf invariant one*, Ann. of Math. **72** (1960), 20–104.
2. ———, *The sphere, considered as an H-space mod p*, Quart. J. Math. Oxford (2) **12** (1961), 52–60.
3. G. Cooke, J. Harper, and A. Zabrodsky, *Torsion free mod p H-spaces of low rank*, Topology **18** (1979), 349–359.

4. J. Harper, *Mod p decompositions of finite H-spaces*, Algebraic and Geometrical Methods in Toplogy, Proceedings 1973, Lecture Notes in Math. no. 428, Springer-Verlag, 1974, pp. 44–51.
5. J. Harper and A. Zabrodsky, *Evaluating a p-th order cohomology operation*, Pub. Mat. UAB **32** (1988), 61–78.
6. P. G. Kumpel, Jr., *On p-equivalences of mod p H-spaces*, Quart. J. Math. Oxford (2) **23** (1972), 173–178.
7. J. McCleary, *Mod p decompositions of H-spaces; Another approach*, Algebraic Topology Aarhus 1978, Lecture Notes in Math. no. 763, Springer-Verlag, 1979, pp. 70–87.
8. M. Mimura, G. Nishida, and H. Toda, *Mod p decomposition of compact Lie groups*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **13** (1977), 627–680.
9. M. Mimura and H. Toda, *Cohomology operations and the homotopy of compact Lie groups-I*, Topology **9** (1970), 317–336.
10. S. Oka, *On the homotopy groups of sphere bundles over spheres*, J. Sci. Hiroshima U. **33** (1969), 161–195.
11. J. D. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces, I*, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 275–292.
12. C. Wilkerson, *Mod p decompositions of mod p H-spaces*, Algebraic and Geometrical Methods in Topology, Proceedings 1973, Lecture Notes in Math. no. 428, Springer-Verlag, 1974, pp. 52–57.